©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Sitzungsber. Abt. II (2000) 209: 47–66

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

© Österreichische Akademie der Wissenschaften 2000
Printed in Austria

Zum Fingersehen Virial verformbarer Körper in der nichtlinearen Statik

Von

H. Irschik

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 12. Oktober 2000 durch das w. M. Franz Ziegler)

Zusammenfassung

Die nachfolgenden Untersuchungen haben das Ziel, den von Josef Finger eingeführten Begriff des Virials der inneren Kräfte verformbarer Körper aus einer neuen Sicht darzustellen. Zunächst werden die Beziehungen des inneren Virials zu verschiedenen Begriffen und Sätzen der Kontinuumsmechanik, besonders zu den astatischen Tensoren, hervorgehoben. Dann wird für statische Probleme mit großen Verformungen die Verwendung eines „Prinzip der virtuellen Viriale" vorgeschlagen. Unterwirft man zum Beispiel eine starre Konstruktion einer geeigneten homogenen Deformation, dann können die Auflagerkräfte mit Hilfe dieses Prinzips in ähnlich bequemer Weise ermittelt werden, wie mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten der Technischen Mechanik, aber ohne die virtuellen Lageänderungen der Konstruktion auf infinitesimale Verrückungen beschränken zu müssen. Als ein weiteres Anwendungsbeispiel des Prinzips der virtuellen Viriale werden exakte eindimensionale Gleichgewichtsbeziehungen für die Resultierenden der inneren Kräfte eines verformbaren Körpers in materieller Darstellung hergeleitet, ohne daß dafür eine Approximation der dreidimensionalen Beziehungen im Sinne der Balkentheorie benötigt wird.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

1. Einleitung und Übersicht

Im Jahre 1897 legte Josef Finger in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien eine Veröffentlichung mit dem Titel „Über das innere Virial des elastischen Körpers" vor [1]. Mit dieser Arbeit unternahm es Finger, dem Begriff des Virials Eingang zu verschaffen in die Kontinuumsmechanik. Er entwickelte das Virial der inneren Kräfte eines verformbaren Körpers, und er setzte es in Beziehung zur Potentialfunktion der Elastizitätstheorie.

Der skalare Begriff des Virials der Kräfte war damals in der Mechanik der Massenpunkte und in der Starrkörpermechanik durch den Satz von Clausius wohl eingeführt, daß nämlich die mittlere lebendige Kraft des Systems gleich ist seinem Virial, vergleiche die Darstellungen von A. Voss über die Prinzipien der rationellen Mechanik, und von H. E. Timerding über die geometrischen Grundlagen der Starrkörpermechanik in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" [2]. In dieser umfassenden Enzyklopädie, welche zwischen 1901 und 1908 erstellt wurde, fand Fingers Arbeit [1] noch keine Berücksichtigung. In der großen Abhandlung "The Classical Field Theories" von C. Truesdell und R. A. Toupin im „Handbuch der Physik" aus dem Jahre 1960 [3], wird mit Gleichung (216.4) eine tensorielle Beziehung angegeben, welche dann in Section 220 als Fingersches Virialtheorem bezeichnet wird, und aus welcher mit Gleichung (219.5) eine skalare Beziehung hergeleitet wird, die das innere Virial Fingers enthält. Der Begriff des Virials selbst wird bei Truesdell und Toupin aber nicht mehr explizit eingeführt. H. Bednarczyk [4] schreibt 1990 über Fingers Arbeit zum Virial des elastischen Körpers: „Noch nie hat er (Finger) über die Form der Verzerrungsenergie bei isotropen und anisotropen Stoffen so klar und knapp geschrieben wie hier, noch nie hat er die Rolle der Orthogonalinvarianten der Verzerrung im isotropen und anisotropen Fall so hell beleuchtet. Trotzdem: die Arbeit blieb bis heute offenbar unbeachtet, sein Versuch der Kontinuisierung des Virialbegriffs hat anscheinend noch kein Echo gefunden."

Die nachfolgenden Untersuchungen haben das Ziel, den Begriff des Virials der Kräfte verformbarer Körper und dessen Beziehungen zu verschiedenen Sätzen der Kontinuumsmechanik aus einer neuen Sicht darzustellen. Dabei wird von einer koordinatenfreien Tensorschreibweise Gebrauch gemacht, welche Finger noch nicht zur Verfügung stand, und welche vor allem durch das Werk "The Non-linear Field Theories of Mechanics" von C. Truesdell und W. Noll [5], sowie durch C. Truesdells Monographie [6] Verbreitung in der Mechanik

gefunden hat. Im folgenden verwendete Formeln der Tensorrechnung mit Grundlagen finden sich zum Beispiel auch im Buch von J. Bonet und R. D. Wood [7] über die nichtlineare Kontinuumsmechanik übersichtlich zusammengestellt.

Der vorliegende Beitrag beschränkt sich auf statische Probleme, obwohl der Begriff des Virials eng mit jenem der kinetischen Energie verbunden ist, also mit der Dynamik. Aber in der Statik wird der Bewegungslehre eine Geometrie der Kräfte als Bewegungsursachen gegenübergestellt. Bei infinitesimal kleinen Bewegungen kann eine erste Verknüpfung dieser beiden Gebiete durch den Begriff der Elementararbeit erfolgen, vergleiche Kapitel 5 in F. Zieglers Buch "Mechanics of Solids and Fluids" [8]. Was nun die Elementararbeit bei kleinen Verschiebungen hergibt, vermag der Begriff des Virials bei endlich großen Verformungen zu leisten. Unter diesem Gesichtspunkt ist der vorliegende Beitrag verfaßt, in welchem die Trägheitskräfte den Körperkräften zugeschlagen werden. Die Verbindung der Ergebnisse zu den Sätzen der Dynamik soll zu einem späteren Zeitpunkt vorgestellt werden, ebenso wie die Anwendung auf spezielle Materialgesetze verformbarer Körper.

Bei den folgenden Darstellungen wird die materielle Formulierung der nichtlinearen Kontinuumsmechanik herangezogen. Durch dyadische Produktbildung mit den Ortsvektoren in der verformten Gleichgewichtslage werden zunächst aus dem ersten Cauchyschen Bewegungsgesetz durch Integration über den Körper die astatischen Tensoren der äußeren und inneren Kräfte gebildet. Diese verschwinden insgesamt. Das Virial der inneren Kräfte wird dann, bis auf einen historisch bedingten Faktor, als Spur des inneren astatischen Tensors erkannt. Das innere Virial ergibt sich somit aus dem kontrahierten Tensorprodukt des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors mit dem Deformationsgradiententensor nach Integration über die Referenzlage. Das Virial der äußeren Kräfte entspricht der Spur des astatischen Tensors der äußeren Kräfte. Das von den äußeren und den inneren Kräften bezüglich der verformten Gleichgewichtslage erzeugte Virial verschwindet insgesamt. Die Fingersche Formulierung dieses Virialsatzes, welche in Eulerscher Betrachtungsweise erfolgte, also mit Bezug auf die verformte Körperlage, wird mittels Transformation wiedergefunden.

Nachdem die Beziehungen zwischen den astatischen Tensoren und dem Fingerschen Virialsatz dargestellt wurden, wendet sich der vorliegende Beitrag dem Prinzip der virtuellen Arbeiten mit großen virtuellen Verschiebungen zu, vergleiche etwa Kapitel 2 des Buches "Mathematical Foundations of Elasticity" von J. E. Marsden und

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

T. J. R. Hughes, [9]. Zunächst wird in der materiellen Formulierung des Fingerschen Virialsatzes die tatsächliche Lage des Körpers durch eine virtuelle, möglicherweise stark verschobene, Lage ersetzt. Das derart gewonnene „Prinzip der virtuellen Viriale" besagt dann, daß das von den äußeren und den inneren Kräften bezüglich der virtuellen Lage gebildete Virial insgesamt verschwindet. Geht man bei der Bildung der Viriale von den Ortsvektoren auf die Verschiebungsvektoren über, welche die virtuelle Lage mit der betrachteten Gleichgewichtslage verbindet, so findet man das genannte Prinzip der virtuellen Arbeiten wieder.

Die im Prinzip der virtuellen Arbeiten bei großen virtuellen Verschiebungen auftretenden Terme stellen keine Elementararbeiten dar. Die Formulierung als verallgemeinerter Virialsatz hat hingegen den Vorteil, daß der Arbeitsbegriff bei großen virtuellen Lageänderungen vermieden wird. Es wird im vorliegenden Beitrag aber auch exemplarisch demonstriert, daß das Prinzip der virtuellen Viriale als eine brauchbare Alternative zu den elementaren Berechnungsmethoden der Technischen Mechanik dienen kann. Dazu wird die Berechnung der Auflagerkräfte eines starren Dreigelenkbogens herangezogen, welchen man in Kapitel 5 des Buches von F. Ziegler [8] auf dem Wege des Prinzips der virtuellen Arbeiten mit infinitesimalen virtuellen Verrückungen durchgerechnet findet. Das Prinzip der virtuellen Viriale vermeidet die Einführung infinitesimaler Verschiebungen, sondern der starre Dreigelenkbogen wird gedanklich einer homogenen Deformation mit einem schiefsymmetrischen Deformationsgradiententensor unterworfen. Dabei verschwindet das virtuelle Virial der inneren Kräfte für sich, und aus dem Verschwinden des virtuellen äußeren Virials können die Auflagerkräfte aus linearen Beziehungen ermittelt werden.

Nach diesem Ausflug in die Stereostatik wird das Prinzip der virtuellen Viriale verwendet, um exakte eindimensionale Gleichgewichtsbeziehungen für die Resultierenden der inneren Kräfte in einem verformbaren dreidimensionalen Körper herzuleiten. Dazu wird eine Gerade in der Referenzlage des Körpers herangezogen, und es wird gefordert, daß die integrierte Form der Gleichgewichtsbeziehungen nur von der axialen Koordinate dieser Geraden abhängen soll. Mit Hilfe einer geeigneten, nicht homogenen virtuellen Deformation gelingt es, eindimensionale Gleichgewichtsbeziehungen in materieller Darstellung herzuleiten, deren Form aus der Technischen Balkentheorie bekannt ist. Die vorliegende Herleitung soll die Anwendung des Prinzips der virtuellen Viriale bei Körpern mit großen Verformungen verdeutlichen, und sie möchte darauf hinweisen, daß diese eindimen-

sionalen Gleichgewichtsbedingungen nicht an die Näherungsannahmen der Balkentheorie gebunden sind.

2. Der Fingersche Virialsatz in materieller Darstellung

Es wird ein materieller Körper B in einer verformten Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ betrachtet, und die materielle Darstellung der Kontinuumsmechanik wird herangezogen. Die Gleichgewichtslage wird somit als Deformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X})$ des Körpers aus einer Referenzlage $\boldsymbol{\kappa}$ beschrieben. In der verformten Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ wird der Ort eines materiellen Punktes von B mit $\boldsymbol{x}$ bezeichnet, während $\boldsymbol{X}$ den Ort des Punktes in $\boldsymbol{\kappa}$ angibt. Es wird vorausgesetzt, daß die Gestalt des betrachteten Körpers soweit regulär ist, und daß die mechanischen Felder soweit stetig verlaufen, daß die im folgenden vorgenommenen mathematischen Operationen durchgeführt werden dürfen. Für diesbezügliche Einzelheiten wird auf die oben zitierte Literatur verwiesen.

Das erste Cauchysche Bewegungsgesetz des materiellen Punktes lautet in materieller Darstellung:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} + \rho_{\mathrm{R}} \boldsymbol{b} = \rho_{\mathrm{R}} \ddot{\boldsymbol{x}} \tag{2.1}$$

Der Index R erinnert daran, daß sich die materielle Betrachtung auf die Referenzlage $\boldsymbol{\kappa}$ bezieht. „Div“ steht für den mit $\boldsymbol{X}$ gebildeten Divergenzoperator. Der Tensor $\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}$ ist der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor, und ρ_{R} bedeutet die Massendichte in der Referenzlage. Die Absolutbeschleunigung in (2.1) wird im folgenden zu Null gesetzt, $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$, weil nur statische Probleme betrachtet werden sollen. Die folgenden Ergebnisse können aber in die Dynamik übertragen werden, wenn man sich die Trägheitskräfte zur linken Seite von (2.1) zugeschlagen denkt.

Sowohl statische als auch kinematische Randbedingungen werden zugelassen. Dabei wird der Körper in seiner Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ durch eingeprägte äußere Körperkräfte $\boldsymbol{b}$ pro Masseneinheit, sowie durch Oberflächenkräfte $\boldsymbol{t}$ belastet. Bei einer kinematischen Randbedingung wird die Lage des Randes vorgeschrieben, und $\boldsymbol{t}$ stellt eine zu ermittelnde Auflagerreaktion dar, während im Fall einer statischen Randbedingung von vornherein eine Aussage über $\boldsymbol{t}$ getroffen werden muß. In der materiellen Beschreibung verwendet man Lagrangesche Oberflächenkräfte $\boldsymbol{t}_{\mathrm{R}}$, welche parallel zu $\boldsymbol{t}$ gerichtet sind, deren Betrag aber entsprechend der lokalen Oberflächenänderung von der Referenzlage zur verformten Gleichgewichtslage angepaßt wird. Als statische Randbedingung wird bei nichtlinearen Problemen häufig $\boldsymbol{t}_{\mathrm{R}}$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

statt $\boldsymbol{t}$ vorgeschrieben. Es wird angenommen, daß unter den gegebenen Randbedingungen und Kräften für den betrachteten Körper (mindestens) eine Gleichgewichtslage existiert, und zwar $\boldsymbol{\chi}$.

Das Cauchysche Spannungstheorem verknüpft $\boldsymbol{t}_{\mathrm{R}}$ mit dem ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor in der Form

$$\boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{R}}, \tag{2.2}$$

wobei $\boldsymbol{n}_{\mathrm{R}}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor am Rand ∂B des Körpers B in der Referenzlage bedeutet.

Jetzt wird das dyadische Produkt von (2.1) mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{p}$ des materiellen Punktes in der verformten Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ gebildet,

$$\boldsymbol{p} \otimes \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{p} \otimes \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \tag{2.3}$$

wobei in materieller Formulierung

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{x}_0. \tag{2.4}$$

Die Lage des raumfesten Ursprunges, von welchem aus $\boldsymbol{p}$ bestimmt wird, wird mit $\boldsymbol{x}_0$ bezeichnet. Nun gilt aber für ein Vektorfeld $\boldsymbol{a}$ (im R^3) und ein Tensorfeld $\boldsymbol{S}$ (von zweiter Stufe), daß

$$\boldsymbol{a} \otimes \operatorname{Div} \boldsymbol{S} = \operatorname{Div}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{S}) - (\operatorname{Grad} \boldsymbol{a})\boldsymbol{S}^T \tag{2.5}$$

"Grad" bezeichnet den mit $\boldsymbol{X}$ gebildeten Gradientenoperator. Die Transponierte von $\boldsymbol{S}$ wird als $\boldsymbol{S}^T$ geschrieben. Weiters steht das Divergenztheorem zur Verfügung, daß nämlich

$$\int_B \operatorname{Div}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{S}) dv_{\mathrm{R}} = \int_{\partial B} (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{S})\boldsymbol{n}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}}. \tag{2.6}$$

Außerdem gilt

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{S})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \otimes (\boldsymbol{S}\boldsymbol{c}), \tag{2.7}$$

wobei $\boldsymbol{c}$ einen Vektor bezeichnet. Wird also (2.3) über die Referenzlage integriert, und benutzt man die Beziehungen (2.2) und (2.5)–(2.7), so folgt die tensorielle Beziehung

$$\boldsymbol{A}^{(a)} + \boldsymbol{A}^{(i)} = \boldsymbol{0}, \tag{2.8}$$

wobei

$$\boldsymbol{A}^{(a)} = \int_B \boldsymbol{p} \otimes \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \int_{\partial B} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}}, \tag{2.9}$$

und

$$\boldsymbol{A}^{(i)} = -\int_B \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}^T dv_{\mathrm{R}}. \tag{2.10}$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{F}$ den Deformationsgradiententensor,

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{p}. \tag{2.11}$$

Der in (2.9) definierte Tensor $\boldsymbol{A}^{(a)}$ wird in der Literatur als astatischer Tensor der äußeren Kräfte bezeichnet. Die mechanische Bedeutung dieses Tensors wird bei Truesdell und Noll, [5], in Section 44 beleuchtet. Man spricht vom astatischen Gleichgewicht der äußeren Kräfte, wenn $\boldsymbol{A}^{(a)} = \boldsymbol{0}$. Das Volumenintegral $\boldsymbol{A}^{(i)}$ in (2.10) enthält den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor, und wird deshalb im folgenden als astatischer Tensor der inneren Kräfte bezeichnet. Die Beziehung (2.8) besagt also, daß in einer Gleichgewichtslage der äußere und der innere astatische Tensor insgesamt verschwinden.

Um von der materiellen Formulierung auf die Eulersche Beschreibungsweise überzugehen, kann benutzt werden, daß

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}^T = (\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{T}, \tag{2.12}$$

wobei $\boldsymbol{T}$ für den symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor steht. Die Jacobische Determinante der Deformation, $(\det \boldsymbol{F})$, gibt das lokale Verhältnis des Volumens in der verformten Gleichgewichtslage zum Referenzvolumen an, siehe [8],

$$dv = (\det \boldsymbol{F}) dv_{\mathrm{R}}. \tag{2.13}$$

Einsetzen von (2.12) und (2.13) in (2.10) liefert die Eulersche Darstellung des astatischen Tensors der inneren Kräfte als Integral des Cauchyschen Spannungstensors über das Volumen in der verformten Lage:

$$\boldsymbol{A}^{(i)} = -\int_B \boldsymbol{T}\, dv, \tag{2.14}$$

Die Eulersche Darstellung von (2.9) lautet

$$\boldsymbol{A}^{(a)} = \int_B \boldsymbol{p} \otimes \rho \boldsymbol{b}\, dv + \int_{\partial B} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{t}\, ds, \tag{2.15}$$

wobei die lokale Form des Satzes von der Erhaltung der Masse verwendet wurde, [8],

$$\rho_{\mathrm{R}} dv_{\mathrm{R}} = \rho\, dv. \tag{2.16}$$

Mit den Eulerschen Darstellungen (2.14) und (2.15) nimmt (2.8) eine Form an, deren Komponentendarstellung in Gleichung (216.4) der oben genannten Abhandlung von Truesdell und Toupin, [3], angegeben ist, und welche dort in Section. 219 als Fingersches Virialtheorem bezeichnet wird. Finger selbst leitete in [1] die Eulersche Form der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Hauptdiagonalglieder der Matrizendarstellung von (2.8) in einem kartesischen (x, y, z)-Koordintensystem her. So gilt etwa für die (x)-Komponente von (2.8), wenn noch mit dem historisch bedingten Faktor (1/2) multipliziert wird:

$$\frac{1}{2}\int_B p_x b_x \rho \, dv + \frac{1}{2}\int_{\partial B} p_x t_x ds = \frac{1}{2}\int_B T_{xx} dv. \tag{2.17}$$

Diese Gleichung stellt den statischen Spezialfall einer Beziehung dar, welche man (in nur leicht veränderter Bezeichnungsweise) in Fingers gegenständlicher Arbeit [1] auf Seite 729 oben findet. Die Nebendiagonalglieder von (2.8) können aber in der gleichen Weise ermittelt werden, wie dies Finger für die Hauptdiagonalglieder tat. Deshalb wird die Eulersche Darstellung von (2.8) bei Truesdell und Toupin, *loc. cit.*, zu Recht als tensorielle Fassung des Fingerschen Virialtheorems bezeichnet.

Finger selbst ermittelte dann das Virial der inneren Kräfte durch Addition der rechten Seiten von (2.17) für die drei Koordinatenrichtungen. Aus gegenständlicher Sicht stellen die Viriale also die mit dem Faktor (1/2) gewichteten Spuren der astatischen Tensoren in (2.8) dar. Die Spur eines Tensors wird im folgenden mit "tr" bezeichnet. In (2.9) und (2.10) darf die Spurbildung mit der Integration wegen der Linearität dieser Operationen vertauscht werden. Wird noch beachtet, daß die Spur des dyadischen Produktes zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ gleich dem inneren Produkt ist,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, \tag{2.18}$$

so kann die Spur von (2.8) in folgender Weise geschrieben werden:

$$V^{(a)} + V^{(i)} = 0. \tag{2.19}$$

Dabei ist das Virial der äußeren Kräfte in materieller Darstellung

$$V^{(a)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^{(a)} = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{p} \quad \rho_{\mathrm{R}} \boldsymbol{b} \, dv_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\int_{\partial B} \boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}}, \tag{2.20}$$

und das Fingersche Virial der inneren Kräfte folgt in materieller Darstellung zu

$$\begin{aligned} V^{(i)} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^{(i)} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\int_B \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}^T dv_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\int_B \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{F}^T \\ &= -\frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} dv_{\mathrm{R}}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Der Doppelpunkt im letzten Ausdruck von (2.21) steht für das kontrahierte Tensorprodukt. Für zwei Tensoren $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{B}$ gilt ja, daß

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}^T) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^T) = \boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{B}. \tag{2.22}$$

Die Eulersche Darstellung von $V^{(i)}$ folgt aus (2.21) durch Transformation mittels (2.12) und (2.13), oder direkt aus (2.14) durch Addition für die drei Koordinatenrichtungen:

$$V^{(i)} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\int_B \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{F}^T dv_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{2}\int_B \operatorname{tr}\boldsymbol{T}\, dv. \tag{2.23}$$

Dies entspricht aber, in heutiger Schreibweise, genau dem von Finger in Gleichung (7) seiner Arbeit [1] angegebenen eleganten Ausdruck für das innere Virial eines deformierten Körpers. Die Beziehung (2.19) stellt somit den skalaren Fingerschen Virialsatz für den statischen Fall dar, daß nämlich in einer Gleichgewichtslage das äußere Virial $V^{(a)}$ und das innere Virial $V^{(i)}$ insgesamt verschwinden. Die Beziehungen (2.20) und (2.21) geben die materiellen Darstellung der Viriale und deren Zusammenhang mit den astatischen Tensoren an. Im folgenden wird der materiellen Darstellung der Vorzug gegeben. Es sei aber noch darauf hingewiesen, daß die Komponentendarstellungen vom Typ (2.17), und somit auch (2.23), als ein Spezialfall eines Theorems von Signorini über gemittelte Cauchysche Spannungen erhalten werden kann, siehe Truesdell und Toupin, [3], S. 568–569.

3. Das Prinzip der virtuellen Viriale

Die in Abschnitt (2) in materieller Betrachtungsweise angegebene Herleitung des Fingerschen Virialsatzes legt die folgende Überlegung nahe: Statt die astatischen Tensoren und die Viriale mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{p}$ der betrachteten Gleichgewichtslage zu bilden, kann in Abschnitt 2 jedes andere Vektorfeld herangezogen werden, welches die Anwendung der verwendeten mathematischen Operationen erlaubt. Speziell können also die Ortsvektoren einer beliebigen anderen verformten Lage des betrachteten Körpers in die Beziehungen von Abschnitt 2 eingesetzt werden, denn eine solche virtuelle Lage erfüllt die gleichen Anforderungen, wie die betrachtete Lage $\boldsymbol{\chi}$ selbst. Ja, es dürfen sogar verformte Lagen von Körpern aus unterschiedlichem Material als virtuelle Lagen herangezogen werden, wenn diese nur auf die ursprüngliche Referenzlage $\boldsymbol{\kappa}$ bezogen werden können.

Es gilt also das folgende verallgemeinerte Virialtheorem: Für einen Körper in einer verformten Gleichgewichtslage verschwinden die von den äußeren und inneren Kräften bezüglich jeder virtuellen Deforma-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

tion aus einer gemeinsamen Referenzlage gebildeten astatischen Tensoren insgesamt. Dies gilt dann auch für die zugehörigen Viriale.

Seien also ($\boldsymbol{t}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}$) die äußeren und inneren Kräfte in der betrachteten verformten Gleichgewichtslage mit Referenzlage $\boldsymbol{\kappa}$, und sei $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ eine virtuelle Deformation aus dieser Referenzlage, seien weiters $\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{X}) = \hat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{x}_0$ die zu dieser Deformation gehörigen Ortsvektoren, dann gilt die folgende Verallgemeinerung des tensoriellen Virialtheorems (2.8):

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(a)} + \hat{\boldsymbol{A}}^{(i)} = \boldsymbol{0}. \tag{3.1}$$

mit den verallgemeinerten astatischen Tensoren:

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(a)} = \int_B \hat{\boldsymbol{p}} \otimes \rho_{\mathrm{R}} \boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \int_{\partial B} \hat{\boldsymbol{p}} \otimes \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}},$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(i)} = -\int_B \hat{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}^T dv_{\mathrm{R}}. \tag{3.2}$$

Es bedeutet $\hat{\boldsymbol{F}} = \mathrm{Grad}\, \hat{\boldsymbol{p}}$ den Deformationsgradiententensor von $\hat{\boldsymbol{\chi}}$. Damit $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ eine kinematisch zulässige Lage des Körpers darstellt, muß für jeden materiellen Punkt der Betrag der Determinante von $\hat{\boldsymbol{F}}$ größer Null sein, siehe auch (2.13). Ähnlich wie bei (2.8), kann die Eulersche Darstellung von (3.1) auch komponentenweise aus dem bei Truesdell und Toupin, [3], in Section 216 behandelten Signorinischen Theorem der gemittelten Spannungen hergeleitet werden, wenn man die Komponenten von $\hat{\boldsymbol{p}}$ als Gewichtungsfunktionen wählt, vergleiche für die linearisierte Theorie die Abhandlung von M. E. Gurtin, [10], Section 18.

Bildet man die Spur von (3.1), so folgt die Verallgemeinerung des Fingerschen Virialsatzes (2.19):

$$\hat{V}^{(a)} + \hat{V}^{(i)} = 0, \tag{3.3}$$

mit den verallgemeinerten Virialen der äußeren und inneren Kräfte:

$$\hat{V}^{(a)} = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}\, \hat{\boldsymbol{A}}^{(a)} = \frac{1}{2} \int_B \hat{\boldsymbol{p}} \quad \rho_{\mathrm{R}} \boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2} \int_{\partial B} \hat{\boldsymbol{p}} \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}},$$

$$\hat{V}^{(i)} = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}\, \hat{\boldsymbol{A}}^{(i)} = -\frac{1}{2} \int_B \hat{\boldsymbol{F}} \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} dv_{\mathrm{R}}. \tag{3.4}$$

Zum Beweis der Beziehungen (3.1)–(3.4) ersetze man in Abschnitt (2) $\hat{\boldsymbol{p}}$ durch $\boldsymbol{p}$. Gleichung (3.3) wird im folgenden als „Prinzip der virtuellen Viriale“ bezeichnet.

Wird im Prinzip der virtuellen Viriale (3.3) der Ortsvektor $\boldsymbol{p}$ von $\hat{\boldsymbol{p}}$ abgespalten,

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\eta}, \tag{3.5}$$

wobei $\boldsymbol{\eta}$ die relative Verschiebung von der verformten Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ zur Lage $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ angibt, und wird der Fingersche Satz (2.19) subtrahiert, so folgt die Beziehung

$$\begin{aligned}\hat{U}^{(a)} &+ \hat{U}^{(i)} \\ &= \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\eta} \quad \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\int_{\partial B} \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}} - \frac{1}{2}\int_B (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{\eta}) \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} dv_{\mathrm{R}} = 0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dabei wurde verwendet, daß

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{\eta}, \tag{3.7}$$

und es steht $\hat{U}$ für die mit den relativen Verschiebungen $\boldsymbol{\eta}$ gebildeten Viriale. Die Verschiebungen $\boldsymbol{\eta}$ dürfen endlich groß sein. Die materielle Formulierung (3.6) findet sich, bis auf den Faktor 1/2, als Prinzip der virtuellen Arbeiten in Kapitel 2 des Buches "Mathematical Foundations of Elasticity" von J. E. Marsden und T. J. R. Hughes, [9], wo es dann in Kapitel 5 zur schwachen Formulierung des Randwertproblems der Elastostatik entwickelt wird. In der schwachen Formulierung soll das virtuelle Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\eta}$ die kinematischen Randbedingungen der Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ erfüllen.

Im vorliegenden Zusammenhang bedeutet (3.6), daß bei einer Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage in jede andere mögliche verformte Lage des Körpers die mit diesem Verschiebungsfeld gebildeten Viriale der inneren und äußeren Kräfte insgesamt verschwinden. Das virtuelle Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\eta}$ muß die kinematischen Randbedingungen nicht erfüllen. Die Oberflächenintegrale in (3.4) und (3.6) erstrecken sich dann über die gesamte Oberfläche des Körpers in der Referenzlage, und enthalten somit auch die Reaktionskräfte an jenen Teilen des Randes, an denen kinematische Randbedingungen vorgeschrieben sind.

Die in den Lehrbüchern der Technischen Mechanik meist beschriebene Version des Prinzips der Virtuellen Arbeiten stellt einen speziellen Fall von (3.6) dar, daß nämlich das virtuelle Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\eta}$ infinitesimal ist, siehe etwa Kapitel 5 der Monographie von F. Ziegler, [8]. Das Prinzip lautet dann, daß die an einem infinitesimalen Verschiebungsfeld geleistete virtuelle Arbeit der äußeren und der inneren Kräfte insgesamt verschwindet. Damit wird das Wort „Arbeit" in physikalisch korrekter Weise verwendet, denn die infinitesimalen virtuellen Arbeiten sind Elementararbeiten, welche von den betrachteten Kräften tatsächlich geleistet werden, falls die infinitesimalen Verschiebungen $\boldsymbol{\eta}$ wirklich auftreten. Hingegen stellt der erste

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Klammerausdruck auf der rechten Seite von (3.6) bei endlich großen Verschiebungen $\boldsymbol{\eta}$ allgemein nicht die Arbeit dar, welche von den betrachteten äußeren Kräften geleistet wird, wenn sich der Körper von $\boldsymbol{\chi}$ nach $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ bewegt. Es ist deshalb didaktisch ungünstig, bei endlich großen Verschiebungen von virtuellen Arbeiten zu sprechen. Der Begriff des Virials weist einen Ausweg, und es wird deshalb vorgeschlagen, (3.6) als Prinzip der virtuellen Verschiebungsviriale zu bezeichnen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten mit infinitesimalen virtuellen Verschiebungen wird in der Ingenieurausbildung meist am Beispiel der Ermittlung der Auflagerkräfte statisch bestimmt gelagerter starrer Körper demonstriert. Denkt man sich so eine Konstruktion von ihrer Umgebung gelöst, und unterwirft man sie einer infinitesimalen Starrkörperverschiebung, so verschwindet die dabei geleistete innere virtuelle Arbeit für sich. Aus dem Verschwinden der äußeren virtuellen Arbeiten errechnet man dann die Auflagerkräfte. Eine aus (3.3) folgende viriale Formulierung, ohne infinitesimale Verschiebungen zu verwenden, gestaltet sich bei der Anwendung aber ebenfalls sehr einfach. Dies soll im folgenden Exkurs in die Technische Mechanik an einem Beispiel demonstriert werden.

Zur Vorbereitung dieser Anwendung auf starre Körper wird eine Lage $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ betrachtet, welche aus einer (noch verformt angenommenen) Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$ durch eine homogene Deformation folgender Art erzeugt wird:

$$\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}^T \tag{3.8}$$

Es ist $\boldsymbol{W}$ ein schiefsymmetrischer und örtlich konstanter Tensor, und $\boldsymbol{q}$ steht für einen konstanten Vektor. Für den schiefsymmetrischen Teil (skw $\boldsymbol{S}$) eines beliebigen Tensors $\boldsymbol{S}$ gilt, daß

$$\operatorname{skw}\boldsymbol{S} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}) = -(\operatorname{skw}\boldsymbol{S})^T \tag{3.9}$$

Wegen

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}) \otimes \boldsymbol{c} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c}) \tag{3.10}$$

kann der verallgemeinerte äußere astatische Tensor in (3.3) mit $\boldsymbol{W}$ aus (3.8) in der Form

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}}^{(a)} = \boldsymbol{W}\int_B \boldsymbol{p} \otimes \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{W}\int_{\partial B} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}}\, ds_{\mathrm{R}} \\ + \boldsymbol{q} \otimes \left(\int_B \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \int_{\partial B} \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}}\, ds_{\mathrm{R}}\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

geschrieben werden, wobei die Integration mit der Multiplikation vertauscht wurde. Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite von (3.11) ist der astatische Tensor $\boldsymbol{A}^{(a)}$ aus (2.9), während der zweite Klammerausdruck die Resultierende der äußeren Kräfte darstellt. Diese verschwindet aus Gleichgewichtsgründen, sodaß

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(a)} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{(a)} \tag{3.12}$$

Die Spur von $\hat{\boldsymbol{A}}^{(a)}$ verschwindet, wenn $\boldsymbol{A}^{(a)}$ selbst ein symmetrischer Tensor ist, wenn also für seinen schiefsymmetrischen Teil gilt, daß

$$\operatorname{skw}\boldsymbol{A}^{(a)} = \operatorname{skw}\left(\int_B \boldsymbol{p} \otimes \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \int_{\partial B} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{3.13}$$

Der zu (skw $\boldsymbol{A}^{(a)}$) gehörige axiale Vektor entspricht aber gerade dem Momentenvektor der äußeren Kräfte in der Gleichgewichtslage $\boldsymbol{\chi}$, bezogen auf den Ursprung. Dieser Momentenvektor muß aus Gleichgewichtsgründen verschwinden, sodaß (3.13) erfüllt ist. Also gilt für $\hat{\boldsymbol{p}}$ aus (3.8), daß das Virial der äußeren Kräfte für sich verschwindet,

$$\hat{V}^{(a)} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\hat{\boldsymbol{A}}^{(a)} = \frac{1}{2}\int_B \hat{\boldsymbol{p}} \quad \rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{b}\, dv_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\int_{\partial B} \hat{\boldsymbol{p}} \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} ds_{\mathrm{R}} = 0. \tag{3.14}$$

Damit ist ein Zusammenhang zwischen dem Prinzip der virtuellen Viriale (3.3) und dem Theorem von Piola hergestellt, daß nämlich für einen Körper im Gleichgewicht und für eine homogene Deformation der Form (3.8) gilt, daß $\int_B \hat{\boldsymbol{p}} \quad \rho\boldsymbol{b}\, dv + \int_{\partial B} \hat{\boldsymbol{p}} \quad \boldsymbol{t}\, ds = 0$, siehe auch Section 18 der Abhandlung von Gurtin, [10], für die lineare Elastizitätstheorie. Die materielle Formulierung (3.14) gilt für verformte Gleichgewichtslagen, aber speziell auch, wenn es sich um einen starren Körper handelt. Damit wird eine bequeme Berechnung der Auflagerkräfte starrer Konstruktionen möglich.

Eine diesbezügliche Anwendung wird am Beispiel des Dreigelenktragwerks aus Bild 1 erklärt. Das ebene Tragwerk besteht aus zwei starren Körpern, dem Balken *I* und dem Balken *II*, welche im Gelenk *C* miteinander verbunden sind. Es wird ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) mit Ursprung im Lager *A* verwendet. Der Balken *I* wird an der Stelle *F* durch eine Einzelkraft $\boldsymbol{F} = \{H \quad -V\}^T$ belastet. Die beiden Balken werden weiters durch ein Doppelmoment M_C beansprucht, welches im Gelenk *C* angreift, siehe Bild 1. Der dort eingezeichnete linke Momentenangriff wirkt, einer baustatischen Konvention entsprechend, auf den rechten Balken, und umgekehrt, so daß das Doppelmoment M_C die beiden Balken auseinander spreizen möchte. In den gelenkigen Festlagern *A* und *B* werden durch

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die Belastung die Reaktionskräfte $\boldsymbol{A} = \{A_x\ A_y\}^T$ und $\boldsymbol{B} = \{B_x\ B_y\}^T$ hervorgerufen. Die Reaktionskraft in B soll berechnet werden.

Dieses Dreigelenktragwerk findet man in Kapitel 5 des Buches von F. Ziegler [8] auf dem Wege des Prinzips der virtuellen Arbeiten mit infinitesimalen virtuellen Verrückungen durchgerechnet.

Zur Berechnung mittels des Prinzips der virtuellen Viriale werden die beiden Stäbe nun homogenen virtuellen Deformationen entsprechend (3.8) unterworfen, und zwar:

$$\hat{\boldsymbol{p}}_I = \boldsymbol{W}_I \boldsymbol{p} = a \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \boldsymbol{p},$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{II} = \hat{\boldsymbol{p}}_C + \boldsymbol{W}_{II}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_C) = \hat{\boldsymbol{p}}_C + c \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_C). \tag{3.15}$$

Die Freiwerte a und c in (3.15) können beliebig gewählt werden. Die beiden Balken stehen somit in der virtuellen Lage senkrecht auf die ursprüngliche Lage, und ihre Länge ist gegenüber der ursprünglichen Lage verändert. Dabei bleibt der Körperzusammenhalt erhalten, siehe Abb. 1, und (3.14) kann auf das gesamte Tragwerk angewendet werden. In Abb. 1 ist eine entsprechende virtuelle Lage des Dreigelenktragwerks strichliert eingetragen. Mit den vom Ursprung im Lager A aus gebildeten Ortsvektoren folgen aus (3.15) die Ortsvektoren in der transformierten Lage:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}_F = \{l_F\ \ h_y\}^T, \boldsymbol{p}_C = \{b\ \ h\}^T, \boldsymbol{p}_B = \{l\ \ 0\}^T \\ &\hat{\boldsymbol{p}}_F = a\{-h_F\ \ l_F\}^T, \hat{\boldsymbol{p}}_C = a\{-h\ \ b\}^T, \hat{\boldsymbol{p}}_B = \hat{\boldsymbol{p}}_C + c\{h\ \ (l-b)\}^T \end{aligned} \tag{3.16}$$

Für das vorliegende Beispiel nimmt (3.14) die folgende Form an:

$$\hat{V}^{(a)} = \tfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{p}}_F\ \ \boldsymbol{F} - a M_C + c M_C + \hat{\boldsymbol{p}}_B\ \ \boldsymbol{B}) = 0. \tag{3.17}$$

Ersetzt man einen Momentenangriff durch ein statisch äquivalentes Kräftepaar, und bildet die Viriale der zugehörigen Einzelkräfte mit der Transformation (3.15), so leitet man leicht die Beiträge von M_C zu (3.17) her. Einsetzen von (3.16) und Zusammenfassen der Terme mit a und c in (3.17) liefert zwei Gleichungen zur Bestimmung der Auflagerreaktionen B_x und B_y:

$$\begin{aligned} -h_F H - l_F V - h B_x + b B_y - M_C &= 0, \\ h B_x + (l-b) B_y + M_C &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dies stimmt mit dem in [8], S. 230, angegebenen Gleichungen überein.

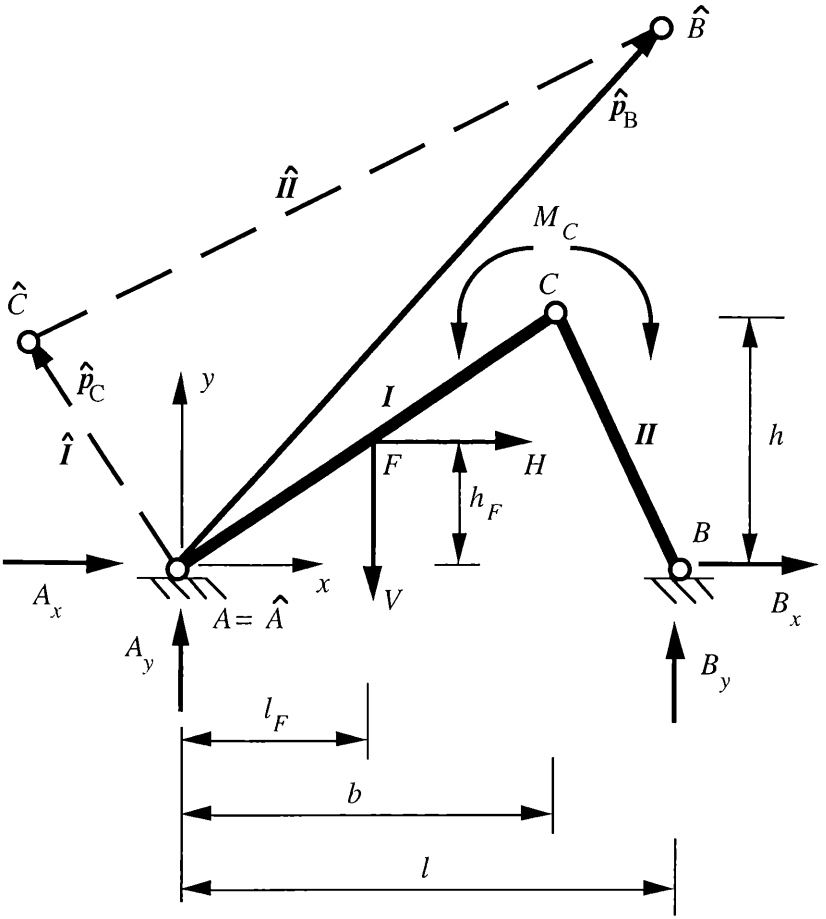

Abb. 1. Dreigelenktragwerk mit Belastung; homogene virtuelle Deformationen nach Gl. (3.14)

4. Eindimensionale Gleichgewichtsbedingungen in materieller Darstellung

Das Prinzip der virtuellen Viriale soll im folgenden verwendet werden, um in exakter Weise eindimensionale lokale Gleichgewichtsbeziehungen für die Resultierenden der inneren Kräfte in einem dreidimensionalen Körper herzuleiten. Dazu wird eine räumliche Kurve in der Referenzlage eines materiellen Körpers betrachtet. Der kürzeren Darstellung wegen erfolgt die Beschränkung auf eine Gerade. Der axiale Einheitsvektor dieser Geraden wird mit $\boldsymbol{e}_x$ bezeichnet. Auf der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Geraden wird ein Ursprung gewählt, und es wird gefordert, daß die integrierte Form der Gleichgewichtsbeziehungen nur von der axialen Koordinate X abhängen soll. Es wird jener Teil B des Körpers betrachtet, der im Bereich $0 \leq X \leq L$ zu liegen kommt und an den Enden dieses Bereichs durch senkrecht zur Achse stehende Ebenen begrenzt wird. Die Berandung der senkrecht zur Achse stehenden Querschnittsebenen von B wird erzeugt durch deren Schnitte mit der Körperoberfläche, oder durch die Schnitte mit einer passend gewählten Fläche innerhalb des Körpers. Die entsprechenden Querschnittsflächen in der Referenzlage werden mit A_{R} bezeichnet. Es sollen in der folgenden Herleitung keine Näherungsannahmen getroffen werden, wie sie in der Technischen Balkentheorie üblich sind, etwa daß L viel größer wäre als die charakteristischen Abmessungen von A_{R}.

Der Ortsvektor eines materiellen Punktes, welcher in der Referenzlage in der Querschnittsebene mit der Koordinate X liegt, wird in der verformten Gleichgewichtslage in der materiellen Form

$$\boldsymbol{p}(X,Y,Z) = \boldsymbol{p}_o(X) + \boldsymbol{p}_c(X,Y,Z) \tag{4.1}$$

angeschrieben, wobei $\boldsymbol{p}_o(X)$ den verschobenen Ort des Achsenpunktes bezeichnet, und (Y,Z) kartesische Koordinaten senkrecht zur X-Achse sind.

In Erweiterung von (3.8) wird nun eine virtuelle Lage von B betrachtet, welche durch

$$\hat{\boldsymbol{p}}(X,Y,Z) = \hat{\boldsymbol{p}}_o(X) + \hat{\boldsymbol{W}}(X)\boldsymbol{p}_c(X,Y,Z), \qquad \hat{\boldsymbol{W}}(X) = -\hat{\boldsymbol{W}}(X)^T \tag{4.2}$$

gegeben sei. Diese virtuelle Körperlage, welche also durch die virtuelle Lage der Achse, $\hat{\boldsymbol{p}}_o(X)$, und eine schiefsymmetrische Transformation $\hat{\boldsymbol{W}}(X)$ der zugehörigen verformten Querschnitte erzeugt wird, soll eine kinematisch zulässige Lage sein. Der Betrag der Determinante des Gradienten

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \mathrm{Grad}\,\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{p}}_o^{\prime} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} + (\hat{\boldsymbol{W}}^{\prime}\boldsymbol{p}_c) \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} + \hat{\boldsymbol{W}}\ \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{p}_c \tag{4.3}$$

soll also immer größer als Null sein. In (4.3) bedeutet das Symbol $(\ )^{\prime} = \frac{\partial}{\partial X}(\ )$ die Ableitung nach der Koordinate X. Es ist weiters

$$\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{p}_c = \mathrm{Grad}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_o) = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{p}_o^{\prime}(X) \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}. \tag{4.4}$$

Beachtet man, daß für einen Tensor $\boldsymbol{S}$ und zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ gilt, daß

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{v}, \tag{4.5}$$

so folgt für den letzten Term in (4.3):

$$\hat{\boldsymbol{W}}\,\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{p}_c = \hat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{F} - (\hat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{p}_o^{\prime}) \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}. \tag{4.6}$$

Jetzt kann der Integrand im Ausdruck für das virtuelle Virial der inneren Kräfte in (3.4) angeschrieben werden als

$$\hat{\boldsymbol{F}} \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} = \hat{\boldsymbol{p}}_o^I \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}} + (\hat{\boldsymbol{W}}^I \boldsymbol{p}_c) \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} \quad (\hat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{F}) - (\hat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{p}_o^I) \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}, \tag{4.7}$$

wobei von den Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} \quad (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{S}\boldsymbol{v}, \\ (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \quad (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{u})(\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Gebrauch gemacht wurde, und das Cauchysche Spannungstheorem (2.2) in der Form

$$\boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} = (\boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(y)}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} + \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(z)}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}})\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} \tag{4.9}$$

verwendet wurde. Der Lagrangesche Spannungsvektor $\boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}$ stellt, multipliziert mit dem Querschnittsflächenelement in der Referenzlage, jene Kraft dar, welche auf das verformte Querschittselement in der Gleichgewichtslage wirkt, wenn der Normaleneinheitsvektor in der Referenzlage des Querschittselementes $\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}$ ist.

Nun gilt für drei Tensoren, daß

$$\boldsymbol{A} \quad (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}), \tag{4.10}$$

und für einen schiefsymmetrischen Tensor $\boldsymbol{W}$ und einen symmetrischen Tensor $\boldsymbol{S}$ verschwindet das kontrahierte Tensorprodukt:

$$\boldsymbol{W} \quad \boldsymbol{S} = 0. \tag{4.11}$$

Es folgt also auf Grund der Symmetriebedingung (2.12), daß der vorletzte Ausdruck in (4.7) gleich Null ist:

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} \quad (\hat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{W}} \quad (\boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}) = 0. \tag{4.12}$$

Auch kann aus den Komponenten eines schiefsymmetrischen Tensors $\boldsymbol{W}$ ein Vektor $\boldsymbol{\omega}$ derart gebildet werden, daß für das vektorielle Produkt von $\boldsymbol{\omega}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{a}$ gilt:

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}. \tag{4.13}$$

Weiters hat man für drei Vektoren die Identität

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}). \tag{4.14}$$

Damit kann (4.7) geschrieben werden als

$$\hat{\boldsymbol{F}} \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} = \hat{\boldsymbol{p}}_o^I \quad \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}^I \quad (\boldsymbol{p}_c \times \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}) - \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (\boldsymbol{p}_o^I \times \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}). \tag{4.15}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Jetzt wird über den Körper B in seiner Referenzlage integriert. Diese Integration kann in die Querschnittsintegration und in die Integration längs der Achse aufgespalten werden. Dann erhält man nach partieller Integration für das virtuelle Virial der inneren Kräfte in (3.4) den Ausdruck

$$2\hat{V}^{(i)} = \int_0^L \hat{\boldsymbol{p}}_o \;\; \boldsymbol{N}_{\mathrm{R}}^l dX + \int_0^L \hat{\boldsymbol{\omega}} \;\; \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}^l dX + \int_0^L \hat{\boldsymbol{\omega}} \;\; (\boldsymbol{p}_o^l \times \boldsymbol{N}_{\mathrm{R}}) dX$$
$$- (\hat{\boldsymbol{p}}_o \;\; \boldsymbol{N}_{\mathrm{R}}) \Big|_{X=0}^{X=L} - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \;\; \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}) \Big|_{X=0}^{X=L}. \tag{4.16}$$

Die Resultierenden der inneren Kräfte in (4.16) sind gegeben durch Integration der Lagrangeschen Spannungsvektoren $\boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}$ über die Querschnittsebene in der Referenzlage. Die Schnittkraft in materieller Darstellung ist

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{R}} = \int_{A_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}} dA_{\mathrm{R}}, \tag{4.17}$$

und für das materielle Schnittmoment ergibt sich die Definition

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} = \int_{A_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{p}_c \times \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}) dA_{\mathrm{R}}. \tag{4.18}$$

Bildet man in analoger Weise die Resultierenden der äußeren Kräfte mit Bezugspunkt in der verformten Achse, so kann für das Virial der äußeren Kräfte in (4.3) geschrieben werden:

$$2\hat{V}^{(a)} = \int_0^L \hat{\boldsymbol{p}}_o \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} dX + \int_0^L \hat{\boldsymbol{\omega}} \;\; \tilde{\boldsymbol{m}}_{\mathrm{R}} dX$$
$$+ (\hat{\boldsymbol{p}}_o \cdot \boldsymbol{Q}_{\mathrm{R}}) \Big|_{X=0}^{X=L} + (\hat{\boldsymbol{\omega}} \;\; \tilde{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{R}}) \Big|_{X=0}^{X=L}, \tag{4.19}$$

wobei

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} = \int_{A_{\mathrm{R}}} \rho_{\mathrm{R}} \boldsymbol{b} \, dA_{\mathrm{R}} + \oint_{\Gamma_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{t}_{\mathrm{R}} dc_{\mathrm{R}} \tag{4.20}$$

die äußere Kraft je Längeneinheit ist, und

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_{\mathrm{R}} = \int_{A_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{p}_c \times \rho_{\mathrm{R}} \boldsymbol{b}) dA_{\mathrm{R}} + \oint_{\Gamma_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{p}_c \times \boldsymbol{t}_{\mathrm{R(x)}}) dc_{\mathrm{R}} \tag{4.21}$$

das äußere Moment je Längeneinheit bedeutet. In (4.20) und (4.21) steht Γ_{R} für den Rand des Querschnittes A_{R}. Die Resultierenden der

Kräfte, welche von außen auf die Endflächen in $X = 0$ und $X = L$ wirken, werden in (4.19) mit $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{R}}$ und $\tilde{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{R}}$ bezeichnet.

Mit (4.16) und (4.19) liefert das Prinzip der virtuellen Viriale, (3.3), weil die virtuelle Lage des Körpers beliebig gewählt werden kann, wenn sie nur kinematisch zulässig ist, die gesuchte integrierte Form der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{N}^l_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{M}^l_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{p}^l_o \times \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} + \tilde{\boldsymbol{m}}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

In diesen Beziehungen sind alle Terme nur mehr Funktionen der axialen Koordinate X in der Referenzlage. Weiters erhält man die statischen Randbedingungen:

$$X = 0, L \quad (\boldsymbol{Q}_{\mathrm{R}} - \boldsymbol{N}_{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{0}, (\tilde{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{R}} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{0}. \tag{4.23}$$

Die Form der Gleichgewichtsbeziehungen (4.22) ist aus der Theorie balkenförmiger Konstruktionen bekannt. Eine entsprechende Herleitung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten, aber im Rahmen einer Theorie von Balken mit zwei sogenannten Direktoren, wird in Kapitel XIV des Buches von S. Antman über die nichtlineare Elastizitätstheorie angegeben, [11], wo auch umfangreiche Literaturzitate zu finden sind. Die vorliegende Herleitung soll die Anwendung des Prinzips der virtuellen Viriale in materieller Darstellung verdeutlichen, und sie soll darauf hinweisen, daß es sich bei den Gleichgewichtsbedingungen (4.22) um exakte Beziehungen handelt, welche nicht mit den Näherungsannahmen der Balkentheorie im Zusammenhang stehen.

Dank

Der Autor dankt dem Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung (FWF) für die Förderung des FWF-SFB13 (Symbolic and Numerical Scientific Computations). Das in der vorliegenden Arbeit angegebene Prinzip der virtuellen Viriale wurde im Teilprojekt 11 des FWF-SFB13 herangezogen, um die Bewegungsgleichungen von elasto-plastischen Konstruktionen mit Starrkörperfreiheitsgraden herzuleiten.

Literatur

[1] Finger, J.: Über das innere Virial eines elastischen Körpers. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **106**, 722–738 (1897).

[2] Klein, F., Müller, C. (Hrsg.): Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vierter Band: Mechanik, 1. Teilband. Leipzig, B.G. Teubner 1901–1908, S. 107–109, S. 169–179.

[3] Truesdell, C., Toupin, R. A.: The Classical Field Theories. In: S. Flügge (Hsg.): Handbuch der Physik, Band III/1: Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Berlin, Springer 1960, 226–793.
[4] Bednarcyk, H.: Josef Finger und Gustav Jaumann, zwei Pioniere der heutigen Kontinuumsmechanik. Österr. Ing.- und Arch. Zeitschrift (ÖIAZ), **135**, 538–545 (1990).
[5] Truesdell, C., Noll, W.: The Non-linear Field Theories of Mechanics, 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1992.
[6] Truesdell, C.: A First Course in Continuum Mechanics. Vol I, General Concepts. New York, Academic Press 1977.
[7] Bonet, J., Wood, R. D.: Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge, Cambridge University Press 1997.
[8] Ziegler, F.: Mechanics of Solids and Fluids, 2nd ed., Wien New York Springer 1998.
[9] Marsden, J. E., Hughes, T. J. R.: Mathematical Foundations of Elasticity. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1983.
[10] Gurtin, M. E.: The Linear Theory of Elasticity. In: S. Flügge (Hsg.): Handbuch der Physik, Band VIa/2: Festkörpermechanik II. Berlin, Springer 1972, S. 1–296.
[11] Antman, S. S.: Nonlinear Problems of Elasticity. New York, Springer 1995.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Hans Irschik, Abteilung für Technische Mechanik, Johannes Kepler Universität Linz, A-4040 Linz-Auhof.